Matemaattisten tieteiden valintakoe 2020

Lue huolellisesti kaikki ohjeet läpi

- **Tarkista, että olet kirjoittanut nimesi ja henkilötunnuksesi kaikkiin vastauslomakkeisiin.**

- Kirjoita vastauksesi
    - suomeksi tai ruotsiksi. Muilla kielillä kirjoitettuja vastauksia ei huomioida arvostelussa.
    - koemonisteelle tai erilliselle paperille. Kirjoita kukin vastaus kyseisen kysymyksen alle.
    - lyijykynällä ja selvällä käsialalla. Arvostelija tulkitsee tulkinnanvaraiset merkinnät vähiten pisteitä tuottavan vaihtoehdon mukaisesti.

- Älä kirjoita vaihtoehtoisia vastauksia. Jos kirjoitat vaihtoehtoisia vastauksia, arvostelussa huomioidaan vain vastaus, josta saat vähiten pisteitä.

- **Vastauksen voi valokuvata tai skannata ja palauttaa .pdf, .png tai .jpg muodossa.**

Pisteyttäminen

Valintakoe pisteytetään asteikolla 0–30. Tehtäväkohtaiset pisteet on ilmoitettu kunkin tehtävän kohdalla.

Valintakoekirjallisuus

Valintakokeen tehtävät perustuvat lukion matematiikan pitkään oppimäärään (9 kurssia, lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 mukaisesti).

Tehtävä 1 (6 pistettä)

Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.

(a) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$, (2 pistettä)

(b) $2\cos 3x - 1 = 0$, (2 pistettä)

(c) $\frac{10}{x+3} \geq x$. (2 pistettä)

Tehtävä 2 (6 pistettä)

Määritä pisteestä $(3,5)$ ympyrälle $x^2 + y^2 = 2$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

Tehtävä 3 (6 pistettä)

Laske käyrien $y_1 = \sin x$ ja $y_2 = \cos x$ kahden peräkkäisen leikkauspisteen välisten kaarien rajoittaman alueen pinta-ala.

Tehtävä 4 (6 pistettä)

Suoran ympyräkartion korkeus on 2 ja pohjan säde on 1. Kartion sisään on asetettu tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyrälieriö, jonka toinen pohjaympyrä on kartion pohjalla ja toinen on kartion vaipalla. Määritä lieriön tilavuus.

Tehtävä 5 (6 pistettä)

Millä vakion a arvoilla tasot $2x + ay + z - 4 = 0$ ja $ax + 8y - 2z - 1 = 0$ ovat

(a) yhdensuuntaiset, (3 pistettä)

(b) toistensa normaalitasot? (3 pistettä)

Helsingin yliopisto
Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma
Valintakoe 29.5.2020 – Ratkaisut ja pisteytys

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$, (2 p.)
   (b) $2\cos 3x - 1 = 0$, (2 p.)
   (c) $\dfrac{10}{x+3} \geq x$. (2 p.)

Ratkaisu.

(a) Tulon nollasäännön mukaan $x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = 0 \iff x = 0$ tai $x^2 - 3x - 4 = 0$ (+1 p.). Jälkimmäisen (toisen asteen) yhtälön ratkaisut ovat

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

Ratkaisuksi saadaan $x = -1$ tai $x = 0$ tai $x = 4$ (+1 p.).

(b) $2\cos 3x - 1 = 0 \iff 2\cos 3x = 1 \iff \cos 3x = \frac{1}{2} \iff 3x = \frac{\pi}{3} + n2\pi$ tai $3x = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$ (+1 p., riittää ilman monikertoja $+n2\pi$). Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = -\frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$ (+1 p.).

(c) Epäyhtälö on määritelty, kun $x \neq -3$. Nyt

$$\frac{10}{x+3} \geq x \iff \frac{10}{x+3} - x \geq 0.$$

Koska

$$\frac{10}{x+3} - x = 0 \iff \frac{10 - x(x+3)}{x+3} = 0 \iff 10 - x(x+3) = 0$$
$$\iff x = -5 \text{ tai } x = 2 \quad (1 \text{ p.})$$

niin merkkikaavion avulla nähdään, että kysytty epäyhtälö toteutuu, kun $x \leq -5$ tai $-3 < x \leq 2$ (+1 p.).

2. Määritä pisteestä $(3, 5)$ ympyrälle $x^2 + y^2 = 2$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt. (6 p.)

Ratkaisu. Koska tangentti kulkee pisteen $(3, 5)$ kautta, niin sen yhtälö on $y-5 = k(x-3)$ eli $kx - y - 3k + 5 = 0$, missä k on tangentin kulmakerroin (+1 p.). Ympyrän $x^2 + y^2 = 2$ keskipiste on säteen $\sqrt{2}$ etäisyydellä keskipisteestä $(0, 0)$ (+1 p.), joten

$$\frac{|k \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3k + 5|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \iff |5 - 3k| = \sqrt{2(k^2+1)} \quad (1 \text{ p.})$$
$$\iff 25 - 30k + 9k^2 = 2k^2 + 2 \quad (1 \text{ p.})$$
$$\iff 7k^2 - 30k + 23 = 0$$
$$\iff k = 1 \text{ tai } k = \frac{23}{7} \quad (1 \text{ p.}).$$

Näin ollen tangenttien yhtälöt ovat $x - y + 2 = 0$ ja $23x - 7y - 34 = 0$ (1 p.).

3. Laske käyrien $y_1 = \sin x$ ja $y_2 = \cos x$ kahden peräkkäisen leikkauspisteen välisten kaarien rajoittaman alueen pinta-ala. (6 p.)

Ratkaisu. Nyt $\sin x = \cos x \iff \tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$ (1 p.). Voidaan valita mitkä tahansa kaksi peräkkäistä leikkauspistettä, valitaan $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ja $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ (1 p.). Tällä välillä $\sin x \geq \cos x$ (1 p.), joten kysytty pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx \quad \text{(1 p.)} \\ &= \Big/_{\pi/4}^{5\pi/4} - \cos x - \sin x \quad \text{(1 p.)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} \quad \text{(1 p.).} \end{aligned}$$

4. Suoran ympyräkartion korkeus on 2 ja pohjan säde 1. Kartion sisään on asetettu tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyrälieriö, jonka toinen pohjaympyrä on kartion pohjalla ja toinen on kartion vaipalla. Määritä lieriön tilavuus. (6 p.)

Ratkaisu. Merkitään lieriön korkeutta h:lla ja pohjan sädettä r:llä, jolloin lieriön tilavuus on $V = \pi r^2 h$. Merkitään ympyräkartion huippua P:llä, ympyrälieriön kannen keskipistettä Q:lla ja ympyrälieriön pohjan keskipistettä R:llä, jolloin R on myös ympyräkartion pohjan keskipiste. Valitaan sitten yksi piste S ympyräkartion vaipan ja ympyrälieriön kannen pohjan leikkausympyrältä. Merkitään vielä T:llä pistettä, joka on ympyräkartion pohjan reunaympyrällä ja samalla suoralla kuin pisteet P ja S. Piirrä kuva! (1 p.)

Suorakulmaisten kolmioiden PQS ja PRT yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{SQ} = \frac{PR}{TR} &\iff \frac{2-h}{r} = \frac{2}{1} = 2 \iff 2 - h = 2r \\ &\iff h = 2 - 2r = 2(1-r) \quad \text{(1 p.).} \end{aligned}$$

Tarkastellaan siis lauseketta

$$V(r) = \pi r^2 h = 2\pi r^2(1-r) = 2\pi(r^2 - r^3), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{(1 p.).}$$

Tämän derivaatan

$$V'(r) = 2\pi(2r - 3r^2) = 2\pi r(2 - 3r) \quad \text{(1 p.)}$$

nollakohdat ovat $r = 0$ ja $r = \frac{2}{3}$ (1 p.). Koska $V(0) = V(1) = 0$ ja

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 2\pi\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = 2\pi\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right) = \frac{8\pi}{27},$$

niin V:n jatkuvuuden perusteella kysytty suurin tilavuus on $8\pi/27$ (1 p.).

5. Millä vakion a arvoilla tasot $2x + ay + z - 4 = 0$ ja $ax + 8y - 2z - 1 = 0$ ovat
   (a) yhdensuuntaiset, (3 p.)
   (b) toistensa normaalitasot? (3 p.)

Ratkaisu.

(a) Tasot ovat yhdensuuntaiset, jos niiden normaalivektorit $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{n}_2 = a\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ovat yhdensuuntaiset. Vektorit $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku $r \in \mathbb{R}$ siten, että $\mathbf{n}_1 = r\mathbf{n}_2$ eli $2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k} = r(a\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ (1 p.). Tämä toteutuu, jos

$$\begin{cases} 2 = ra, \\ a = 8r, \\ 1 = -2r \quad \text{(1 p.).} \end{cases}$$

Kahdesta viimeisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{2}, \\ a = -4, \end{cases}$$

joka toteuttaa myös ensimmäisen yhtälön $ra = -\frac{1}{2} \cdot (-4) = 2$. Näin ollen tasot ovat yhdensuuntaiset, kun $a = -4$ (1 p.).

(b) Tasot ovat toistensa normaalitasoja, jos niiden normaalivektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (1 p.). On siis oltava

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2a + 8a - 2 = 0 \quad \text{(1 p.)}$$

$$\iff 10a = 2 \iff a = \frac{1}{5} \quad \text{(1 p.).}$$